



Ngày thi: 12/03/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

(Đề thi này gồm 1 trang)

Câu 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \frac{x}{y} + \frac{1+y}{1+x} = 2. \end{cases}$$

Câu 2. Ở mỗi ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 3×3 , có 4 viên bi. Bạn Hà lấy bi ra khỏi bảng, theo qui tắc: Mỗi lần, lấy hai viên bi nằm ở hai ô vuông con kề nhau, ở mỗi ô lấy một viên. Hỏi, bạn Hà có thể lấy ra khỏi bảng tối đa bao nhiêu viên bi?
(Hai ô vuông được gọi là kề nhau, nếu chúng có cạnh chung.)

Câu 3. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 16 = 5^y$.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi K là điểm đối xứng với A qua O , và D là hình chiếu vuông góc của K trên BC . Gọi M là trung điểm của BC , và N là trung điểm của AM . Đường thẳng qua D và song song với AM cắt đường tròn tâm K , bán kính KD , tại điểm thứ hai E , khác D .

- (a) Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC . Chứng minh $BH = CD$.
(b) Chứng minh bốn điểm B, C, N, E cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5. Điền vào mỗi ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 20×22 một số nguyên dương không vượt quá 10, sao cho hai số được điền ở hai ô có đỉnh chung nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng, có ít nhất 74 ô vuông con được điền số như nhau.

Câu 6. Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn:

- m không chia hết cho 101;
- Tồn tại 50 ước dương của n , mà số dư trong các phép chia 50 ước này cho 101 là: 51, 52, 53, ..., 100.

Chứng minh rằng, tồn tại ước dương d của n^2 , mà $m - d$ chia hết cho 101.

_____ Hết _____



Ngày thi: 08/01/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

(Đề thi này gồm 3 trang)

Câu 1. Cho a, b là các số thực, sao cho phương trình $ax + b = 20x + 23$ có vô số nghiệm. Tính $S = (a - b)^4$.

Câu 2. Giải phương trình $2\sqrt{(x-1)^2(x+1)} = x^3 - x^2 - x + 2$.

Câu 3. Cho a, b, c, d là các số hữu tỉ, thỏa mãn: $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$.
Tính $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y = -\frac{4}{3}x + m$, với m là tham số dương. Biết rằng, khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d bằng 12. Tính diện tích của tam giác tạo bởi d và hai trục tọa độ.

Câu 5. Với mỗi số nguyên dương k , đặt

$$f(k) = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

Tìm số nguyên dương n để

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = 0,99.$$

Câu 6. Có bao nhiêu số có dạng 2^n ($n \in \mathbb{N}$) thuộc khoảng $(100; 2023)$?

Câu 7. Số $N = 2^{2023} \times 3 \times 5^{2020} \times 7$ có bao nhiêu chữ số?

Câu 8. Gọi a và b tương ứng là số các chữ số của số $A = 2^{50}$ và số $B = 5^{50}$. Tìm $a + b$.

Câu 9. Một người, mỗi ngày, đi bộ 3km hoặc 4km. Hỏi để đi được tổng cộng 250km, người đó cần đi trong ít nhất bao nhiêu ngày?

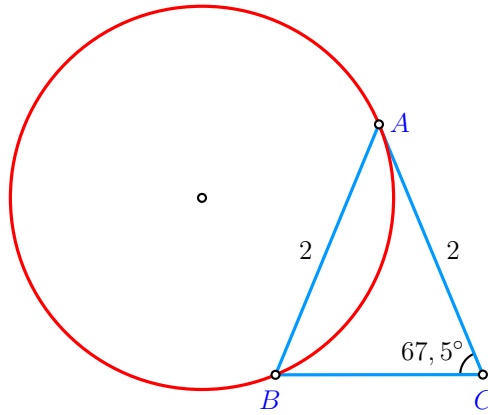
Câu 10. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $2n$ là số chính phương và $5n$ là số lập phương.

Câu 11. Tìm số thực M lớn nhất, sao cho $x^2 + y^2 + z^2 \geq Mx(y+z)$ với mọi số thực x, y, z .

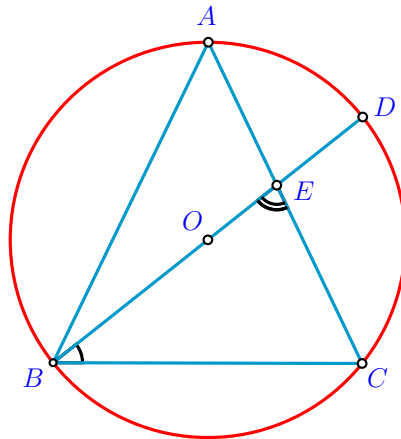
Câu 12. Điền đủ 10 số nguyên dương đầu tiên vào 10 ô của bảng ô vuông 2×5 (mỗi ô được điền đúng 1 số). Xét tổng các số trên mỗi hàng và tổng các số trên mỗi cột. Hỏi trong 7 tổng đó, có tối đa bao nhiêu tổng là số nguyên tố?

Câu 13. Kí hiệu N là tích của 5 số nguyên tố đầu tiên. Hỏi, có bao nhiêu số nguyên dương d thoả mãn N^2 chia hết cho d , nhưng N không chia hết cho d ?

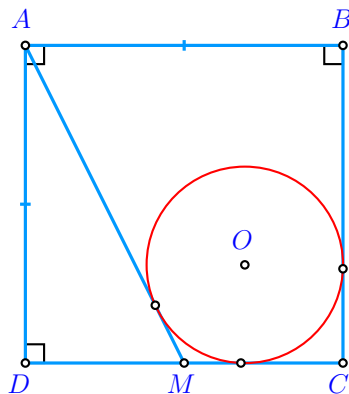
Câu 14. Cho tam giác ABC cân tại A , có góc đáy bằng $67,5^\circ$ và độ dài cạnh bên bằng 2. Tính bán kính của đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A .



Câu 15. Trong hình dưới đây, ABC là tam giác cân tại A , BD là đường kính của đường tròn tâm O , và $\widehat{BEC} = 2\widehat{DBC}$. Tìm số đo góc \widehat{BAC} .

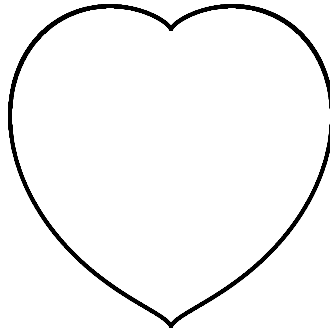


Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 1; M là trung điểm cạnh CD . Tính bán kính của đường tròn nằm bên trong hình vuông đó và tiếp xúc với AM, MC, BC .



Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho một đường “trái tim” như hình dưới đây. Biết rằng, điểm $M(x; y)$ thuộc đường đó khi và chỉ khi $(x^2 + y^2 - 4)^3 = x^2y^3$. Hỏi có bao nhiêu điểm nguyên thuộc đường đó?

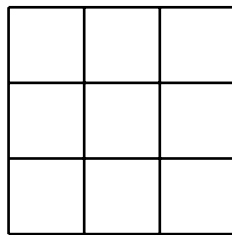
(Điểm nguyên là điểm có cả hoành độ và tung độ đều là các số nguyên).



Câu 18. Cho dãy số $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$. Hỏi trong 2023 số hạng đầu tiên của dãy, có bao nhiêu số lẻ?

Câu 19. Hỏi, từ 11 số nguyên dương đầu tiên, có thể chọn ra được tối đa bao nhiêu số, sao cho 3 số đôi một phân biệt bất kì, trong các số được chọn, là độ dài ba cạnh của một tam giác?

Câu 20. Một chiếc bánh hình vuông được chia thành 9 miếng như hình vẽ. Một chú chuột lần lượt chọn từng miếng trong 9 miếng đó để ăn hết chiếc bánh. Miếng thứ nhất chú chọn là một trong 4 miếng góc. Từ miếng thứ hai, miếng được chọn bao giờ cũng có cạnh chung với miếng vừa được chọn trước đó. Hỏi chú chuột có bao nhiêu cách chọn như thế?



_____ Hết _____